ثانوية ابن عليوي صالح   المستوي : 3 ت ر

2021/2020   المدة : ساعتين

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول (7 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

1/ بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$

2/ ا) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ب) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة

3/ (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{3U_n}{1-2U_n}$

ا) اثبت ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول

ب) اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم بين ان $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$، احسب $lim\, U_n$

4/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني (13 نقاط)

I g الدالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} g(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3/ ا) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α على $]1 ; +\infty[$ ، ثم تحقق ان $\alpha \in [e^2+1 ; e^3+1]$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II f الدالة المعرفة على$]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{ln(x^2-1)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، وبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2/ ا) بين أنه من اجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) بين ان f متزايدة تماما على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}]$ و ومتناقصة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

3/ بين أن $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4/ بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها β حيث $1,4 < \beta < 1,5$

5/ ارسم (C_f) (نأخذ $\sqrt{\alpha} \simeq 3$)

6/ m وسيط حقيقي ، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين متمايزين

7/ h دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = f(e^x)$

ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

تصحيح اختبار الفصل الأول في الرياضيات 3ع ت

التمرين الأول (7ن)

$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+1}$; $u_0 = \frac{1}{3}$

① من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

$n=0$: $u_0 = \frac{1}{3}$ ، $0 < u_0 < \frac{1}{2}$ ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ (0,1)

$P(n+1)$ صحيحة : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ؟

$0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $1 < 2u_n+1 < 2$ اذن

$-1 < \frac{-1}{2u_n+1} < -\frac{1}{2}$ ومنه $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

(u_n) محدودة

② - أ $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{2u_n+1} - u_n = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1}$ (0,1)

$= \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+2}$

$0 < u_n < \frac{1}{2}$ منه $0 < 1-2u_n < 1$ اذن $1-2u_n > 0$

و $u_n > 0$ منه $u_{n+1} - u_n > 0$

(u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ (0,1)

ب) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$ (0,1)

نقول متقاربة

③ $V_n = \frac{3u_n}{1-2u_n}$

أ) $V_{n+1} = \frac{3u_{n+1}}{1-2u_{n+1}} = \frac{6u_n}{1-2u_n} = 2V_n$ (1)

(V_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $V_0 = 1$ (0,5)

ب) الحد العام $V_n = 2^n$ (0,1)

$V_n = \frac{3u_n}{1-2u_n}$ ومنه $u_n = \frac{V_n}{2V_n+3}$ ، $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$ (0,1)

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n\left[2+\frac{3}{2^n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{2^n}} = \frac{1}{2}$ (0,1)

(4) $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ (1)

$\frac{1}{u_n} = \frac{2^{n+1}+3}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} + \frac{3}{2^n} = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$w_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية $q = \frac{1}{2}$ ، $w_0 = 3$

$S_n = 2 + w_0 + 2 + w_1 + \dots + 2 + w_n$

$= 2(n+1) + w_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

$= 2n+2+6-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$S_n = 2n+8-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (0,25)

التمرين الثاني (13ن)

I) $D =]1,+\infty[$; $g(x) = 2x-(x-1)\ln(x-1)$

① $\lim_{x\to1} g(x) = 2$ (0,1)

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\left[\frac{2x}{x-1} - \ln(x-1)\right] = -\infty$ (0,1)

② $g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \frac{x-1}{x-1} = 1 - \ln(x-1)$

$g'(x)=0$ يعني $1-\ln(x-1)=0$ يعني $x=e+1$ (0,1)

x	1		$e+1$		$+\infty$
$1-\ln(x-1)$		+	0	−	

متزايدة تماما على $]1,e+1]$ ومتناقصة تماما على $[e+1,+\infty[$ (0,1)

$g(e+1) = 2(e+1) - e\ln e = e+2$ (0,1)

x	1		$e+1$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−			
$g(x)$	2	↗	$e+2$	↘	0	↘	$-\infty$

3) - أ $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا من $]1,+\infty[$

من جدول التغيرات لدينا g مستمرة (1)

ومتناقصة تماما على $[e+1,+\infty[$

$g(e+1) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

في $]1,+\infty[$ وهو وحيد على $[e+1,+\infty[$

ب) $\alpha \in [e^2+1;e^3+1]$ (0,1)

$g(e^2+1) = 2$ ، $g(e^3+1) = 2-e^3$

حسب تقديم $g(e^2+1) \times g(e^3+1) < 0$

$e^2+1 < \alpha < e^3+1$ وحل وحيد $g(x)=0$

$g(\alpha)=0$ تحقق

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

(0,1)

II) $D =]1,+\infty[$; $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

1) $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = -\infty$ (0,1)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}$ (0,1)

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$

$y=0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي (0,25)

2) - أ $f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1}x - \ln(x^2-1)}{x^2}$

$= \frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$ (0,75)

ب) اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x^2)$

$g(x^2)=0$ يعني $x^2=\alpha$ ويعني $x=\sqrt{\alpha}$

f متزايدة تماما على $]1,\sqrt{\alpha}]$ (1)

ومتناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha},+\infty[$

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$g(x^2)$		+	0	−	

ج)

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\sqrt{\alpha})$	↘	0

(0,1)

③ لدينا $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

ولدينا $g(\alpha)=0$ أي $2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0$

ومنه $\ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ ومنه (0,1)

$f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\alpha/(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

④ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها β حيث

$1,4 < \beta < 1,5$

* من جدول التغيرات لدينا (0,1)

f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,4;1,5]$

$f(1,5) = 0,14$ ، $f(1,4) = -0,029$

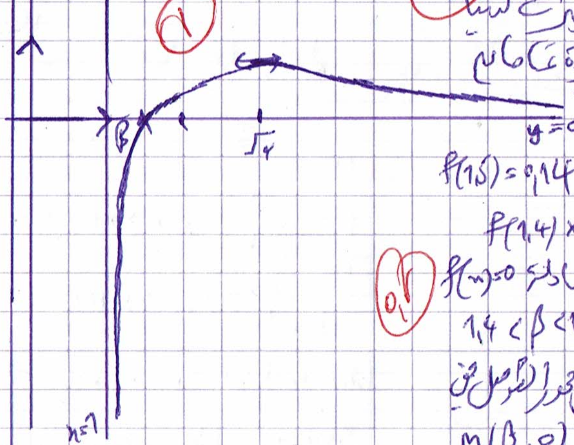
$f(1,4) \times f(1,5) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ (0,1)

لها حل وحيد $1,4 < \beta < 1,5$

و (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في

النقطة الوحيدة $M(\beta,0)$



5) نأخذ $\sqrt{\alpha} = 3$ ، و $f(3) = \frac{3}{4} = 0,75$ ، $x=1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي (0,25)

6) $f(x) = f(m)$ تقبل حلين متمايزين (0,75)

من أجل $m \in]\beta,\sqrt{\alpha}[\cup]\sqrt{\alpha},+\infty[$

⑦ h معرفة على $]0,+\infty[$ ، $h(x) = f(e^x)$ (دالة مركبة $v \circ u$)

* $h'(x) = e^x \times f'(e^x)$ (0,1)

لدينا $x>0$ ومنه $e^x > 1$ أي $e^x \in]1,+\infty[$ (تنتمي مجال f)

اذن اشارة $h'(x)$ من اشارة $f'(e^x)$ لأن $e^x > 0$

$h'(x)=0$ يعني $f'(e^x)=0$ أي $e^x = \sqrt{\alpha}$ منه $x = \ln\sqrt{\alpha}$ (0,1)

اذن h متزايدة تماما على $]0,\ln\sqrt{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على $[\ln\sqrt{\alpha},+\infty[$

$\lim_{x\to0} h(x) = \lim_{x\to0} f(e^x)$ $(e^x = X)$

$= \lim_{X\to1} f(X) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(e^x)$ $(e^x = X)$

$= \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$

$h(\ln\sqrt{\alpha}) = f(e^{\ln\sqrt{\alpha}})$

$= f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	↘	0

(0,5)